接触構造と2階偏微分方程式 (特異点論と微分方程式)

辻, 幹雄

数理解析研究所講究録
1111 巻 1999 年 125-137

接触構造と2階偏微分方程式

京都産業大学理学部数学教室 辻　幹雄*

1 序

2階非線形双曲型方程式に対する初期値問題について考える。一般的には、このタイプの初期値問題は古典解を大域的に持たないことが証明されている。即ち、解の特異点が有限時間内で現れるのである。我々の興味はこの問題に対する大域理論にある。また解に特異点が現れても、物理現象は一般的には特異点と共存して存在し続ける。従って我々の目的は「特異点を越えてどの様に解を延長していくことが可能であるか」を考察することになる。この為には「解の特異点の構造」を知ることが必要である。我々の方法は微分方程式を cotangent space の中で大域的に解き、その後、base space に射影するのである。ここで特異点論との接触が生まれる。先ず §2 に於いて Monge-Ampère 方程式に対する求積法について述べる。これは2階偏微分方程式であり、数理物理学や幾何学に現れる方程式は概ねこの形に表現される。歴史的には このクラスの方程式に対する求積法は先ず D. Darboux [3] や E. Goursat [5, 6] により深く研究された。しかし彼等による“可積分可能なクラス”に入る為には方程式は強い条件を満足しなければならない。しかも応用上、重要な方程式は概ねその条件を満たさない。ではそのときどの様にして cotangent space の中で解くかが問題となる。これが §2 の主な目的である。しかしこの節では比較の為に手短に D. Darboux、及び E. Goursat の理論の紹介から始める。§3 に於いては或る種の非線形波動方程式を cotangent space の中で解く。そしてその解を base space に射影すれば、どの様な解が得られるかを議論する。§4 に於いては1階双曲形保存系に対する初期値問題に対して同様の議論を展開する。

最初に、青本和彦先生には筆者の拙い話を辛抱強く聞いて下さり、貴重なコメントをして頂いたことに心から感謝致します。また泉屋周一氏には [27] を教えて頂いたこと、及び

*1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35L70; Secondary 53C21, 58C27, 58G17. Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C), No. 10640219, the Ministry of Education, Japan.

待田芳徳氏には [1] を教えて頂いたこと、更に彼等の数々の助言に対して心から感謝致します。筆者のこの課題に関する最初の出版は [23] である。その頃、“楕円形 Monge-Ampère 方程式”に対しては沢山の論文があったが、“双曲形 Monge-Ampère 方程式”に対する大域論はまだ十分に整備されていなかった。これは現時点に於いても言えることである。従って「後者の課題に関する論文の数は前者に比べて大変少ない為、すぐ研究の第一線に立てる」と当時大分宣伝したのであった。最近、泉屋氏や待田氏から [27] や [1] の存在を指摘されて、“双曲形 Monge-Ampère 方程式”に関しては最近の発展に注意を払う必要があることを思い知らされた次第である。

2 Monge-Ampère 方程式の求積法

この節では次の様な Monge-Ampère 方程式の求積法について考察する：

$$F(x,y,z,p,q,r,s,t) = Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) - E = 0 \tag{2.1}$$

ここで $p = \partial z/\partial x, q = \partial z/\partial y, r = \partial^2 z/\partial x^2, s = \partial^2 z/\partial x \partial y$, そして $t = \partial^2 z/\partial y^2$ である。また A, B, C, D 及び E は (x,y,z,p,q) のなめらかな関数である。方程式 (2.1) を幾何学的に考えれば、(2.1) は 8 次元空間 $\mathbf{R}^8 = \{(x,y,z,p,q,r,s,t)\}$ に於いて定義されたなめらかな曲面である。ところで p、及び q は $z = z(x,y)$ の 1 階偏導関数なので $dz = pdx + qdy$ が成り立つ。更に r, s 及び t は $z = z(x,y)$ の 2 階偏導関数なので $dp = rdx + sdy$ 及び $dq = sdx + tdy$ が成立する。$\{dz = pdx + qdy,\ dp = rdx + sdy,\ dq = sdx + tdy\}$ を 2 階の接触構造とよぶ。すると (2.1) の解は曲面 $\{(x,y,z,p,q,r,s,t) \in \mathbf{R}^8; f(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0\}$ に於ける 2 階の接触構造 $\{dz = pdx + qdy,\ dp = rdx + sdy,\ dq = sdx + tdy\}$ の “maximal integral submanifold” と捉えることが出来る。この定式化が方程式 (2.1) を具体的に解くのにも有効であることを示したい。その前にいくつかの定義を与える。

$$\Gamma : (x,y,z,p,q) = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), p(\alpha), q(\alpha)), \quad \alpha \in \mathbf{R}^1$$

を $\mathbf{R}^5$ における滑らかな曲線とする。次の関係式

$$\frac{dz}{d\alpha}(\alpha) = p(\alpha)\frac{dx}{d\alpha}(\alpha) + q(\alpha)\frac{dy}{d\alpha}(\alpha)\,. \tag{2.2}$$

が満たされるとき、曲線 Γ は “帯” と呼ばれる。Γ を $\mathbf{R}^5$ における任意の帯とし、方程式 (2.1) はその近傍において定義されていると仮定する。“特性帯” とはその帯に沿って 2 階

の偏導関数の値を方程式から決めることが出来ない場合を意味しているので、次の様な定義に達する：

定義 2.1 $\mathbf{R}^5 = \{(x, y, z, p, q)\}$ に於ける曲線 Γ が方程式 (2.1) の特性帯であるとはそれが (2.2) を満たし、更に次の (2.3) が成立するときである：

$$\det \begin{bmatrix} F_r & F_s & F_t \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix} = F_t\dot{x}^2 - F_s\dot{x}\dot{y} + F_r\dot{y}^2 = 0 \tag{2.3}$$

ここで $F_t = \partial F/\partial t, F_s = \partial F/\partial s, F_r = \partial F/\partial r, \dot{x} = dx/d\alpha$ そして $\dot{y} = dy/d\alpha$ である。

(2.3) を $\dot{x}/\dot{y}$ に関する 2 次方程式とみなしたとき、その判別式を Δ と記すと

$$\Delta = F_s^2 - 4F_rF_t = B^2 - 4(AC + DE).$$

$\Delta < 0$ のとき、方程式 (2.1) は楕円形、$\Delta > 0$ のとき (2.1) は双曲形とよばれる。この講演では双曲形の場合のみを考察する。2 次方程式 $\lambda^2 + B\lambda + (AC + DE) = 0$ の 2 つの解を λ_1 及び λ_2 と記す。特性帯は次の方程式系を満足する：

$$\begin{cases} dz - pdx - qdy = 0 \\ Ddp + Cdx + \lambda_1 dy = 0 \\ Ddq + \lambda_2 dx + Ady = 0 \end{cases}, \tag{2.4}$$

または

$$\begin{cases} dz - pdx - qdy = 0 \\ Ddp + Cdx + \lambda_2 dy = 0 \\ Ddq + \lambda_1 dx + Ady = 0 \end{cases}. \tag{2.5}$$

これから $\omega_0 = dz - pdx - qdy, \omega_1 = Ddp + Cdx + \lambda_1 dy$、そして $\omega_2 = Ddq + \lambda_2 dx + Ady$ と記す。ω_1 と ω_2 の外積をとり、そこに 2 次の接触構造 $\omega_0 = 0,\ dp = rdx + sdy$ 及び $dq = sdx + rdy$ を代入すると次の式を得る：

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = D\Big\{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) - E\Big\}\, dx \wedge dy\,. \tag{2.6}$$

分解 (2.6) は小さなアイデアであるが、これが今後の計算に大きな指針を与えてくれる。空間次元が 3 より大のとき、上記の様な分解は一般的には不可能である。しかし分解可能であるとき、空間次元が 3 より大であっても同様の議論を展開することが可能である。最初に D. Darboux [3] 及び E. Goursat [5,6] により発展させられた "特性曲線の方法" を我々の観点から整理しておく。彼等の方法は粗く言って "1 階偏微分方程式の求積" に帰着させるのである。"第一積分" の概念を導入する。.

定義 **2.2** 関数 $V = V(x,y,z,p,q)$ が $\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$ の "第一積分"であるとは $dV \equiv 0 \mod\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$ となるときである。

命題 **2.3** $\lambda_1 \neq \lambda_2$, かつ (2.4), または (2.5), が2個の独立な第一積分 $\{u,v\}$ をもつと仮定する。このとき

$$du \wedge dv = k\,\omega_1 \wedge \omega_2 = kD\{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) - E\}dx \wedge dy\,. \tag{2.7}$$

を満たす関数 $k = k(x,y,z,p,q) \neq 0$ が存在する。

方程式 (2.1) が (2.7) の様に書けるとき、微分形式系 (2.4), 又は (2.5), は2個の独立な第一積分 $\{u,v\}$ をもつ。従って (2.7) は (2.4)、又は (2.5)、が2個の独立な第一積分をもつ為の必要十分条件を表現している。(2.4), 又は (2.5), が2個の独立な第一積分をもつとき、方程式 (2.1) は "*integrable in the sense of Monge*" とよばれた。しかし G. Darboux[3] の p. 263 を読むと、上記の条件が満足されるとき "*integrable in the sense of Darboux*" と呼ぶ方が良いのではないかと思われる。また E. Goursat もこのクラスの方程式を大変深く研究した ([5], [6])。従って (2.4), 又は (2.5), が2個の独立な第一積分をもつとき、方程式 (2.1) を "*integrable in the sense of Darboux and Goursat*" と言うことにする。

次に (2.1) に対する初期値問題について考える。C_0 を $\mathbf{R}^5 = \{(x,y,z,p,q)\}$ に於いて定義された初期帯とする。初期条件 C_0 を満たす (2.1) に対する初期値問題とは初期帯 C_0 を含む (2.1) の解曲面 $z = z(x,y)$ を求めること、即ち $\mathbf{R}^5$ の中で2次元曲面 $\{(x,y,z(x,y), \partial z/\partial x(x,y), \partial z \partial y(x,y))\}$ が初期帯 C_0 を含み、かつ (2.1) を満たす関数 $z = z(x,y)$ を求めることである。ここで微分形式系 (2.4) が2個の独立な第一積分 $\{u,v\}$ をもつと仮定する。初期帯 C_0 が特性的でないならば、C_0 の上で 0 となるがその勾配ベクトルが $\vec{0}$ でない様な関数 $g(u,v)$ が存在する。この関数は (2.1) の "中間積分 (intermediate integral)" と呼ばれる。ここで $g(u,v) = f(x,y,z,p,q)$ とおく。初期条件 C_0 を満たす $f(x,y,z,\partial z/\partial x, \partial z/\partial y) = 0$ の解は明らかに (2.1) を満たす。従って次の定理が得られる。

定理 **2.4** ([3], [5, 6]) 初期帯 C_0 は特性的でないと仮定する。C_0 を満たす (2.1) の解は C_0 を満たす $f(x,y,z,\partial z/\partial x, \partial z \partial y) = 0$ の解として得られる。

これからがこの節の本論である。即ち「(2.4) 及び (2.5) が共に2個の独立な第一積分をもたない場合」を考察する。我々の出発点は方程式 (2.1) を (2.6) の様に一次形式の積として表現する点である。簡単の為に $D \neq 0$ の場合を考える。本質的な条件は $\Delta \neq 0$ であり、

前者の仮定は本質的ではない。ここで注意することは(2.6)の左辺は$\mathbf{R}^5 = \{(x, y, z, p, q)\}$において定義された微分形式であるという点である。このことから自然と次の様な「幾何学的解」という概念に至る。

定義 2.5 (2.1)の"正規な幾何学的解 *(regular geometric solution)*"とは$\mathbf{R}^5 = \{(x, y, z, p, q)\}$に於いて定義された2次元部分多様体であり、その上で$dz = pdx + qdy$及び$\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$が成立しているときである。

上の定義において"正規(regular)"という形容詞を入れたのは、将来"特異(singular)"な場合も考える必要が生まれるであろうと思っているからである。今後、$\omega_0 = dz - pdx - qdy$と記すことにする。すると我々の問題は「$\omega_0 = 0$及び$\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$を満たす部分多様体を求めること」と定式化出来る。これは"Pfaff問題"と似ている。違いは「Pfaff問題の場合、微分形式の次数が1である」点である。また我々はこの問題をC^∞-空間で考えたい。従ってCartan-Kählerの定理、及びその手法をそのまま適用することは出来ない。ここでは上記の問題を解く為に"heuristic approach"をとる。その為に少し準備をする。(2.7)に現れるω_1及びω_2においてλ_1とλ_2を入れ替えて得られる微分形式をϖ_1及びϖ_2と記す、即ち

$$\varpi_1 = Ddp + Cdx + \lambda_2 dy, \quad \varpi_2 = Ddq + \lambda_1 dx + Ady.$$

このとき次の等式を得る：

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \varpi_1 \wedge \varpi_2 = D\, F(x, y, z, p, q, r, s, t)\, dx \wedge dy. \tag{2.8}$$

ここで幾何学的解が2個のパラメターαとβを用いて次の様に表現出来たと仮定する：

$$x = x(\alpha, \beta), y = y(\alpha, \beta), z = z(\alpha, \beta), p = p(\alpha, \beta), q = q(\alpha, \beta). \tag{2.9}$$

するとω_iとϖ_i $(i = 1, 2)$は

$$\omega_i = c_{i1} d\alpha + c_{i2} d\beta, \quad \varpi_i = d_{i1} d\alpha + d_{i2} d\beta \quad (i = 1, 2)$$

と書ける。即ち $\omega_1 \wedge \omega_2 = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})\, d\alpha \wedge d\beta$ 及び $\varpi_1 \wedge \varpi_2 = (d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21})\, d\alpha \wedge d\beta$を得る。従って$\omega_1 \wedge \omega_2 = \varpi_1 \wedge \varpi_2 = 0$となる為の十分条件は次の様に表現出来る：

$$c_{11} = c_{21} = d_{12} = d_{22} = 0. \tag{2.10}$$

(2.10) に接触構造 $dz = pdx + qdy$ を付け加えることにより、次の様な 1 階偏微分方程式系を得る：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} - p\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} - q\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = 0 \\[2ex]
D\dfrac{\partial p}{\partial \alpha} + C\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + \lambda_1\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = 0 \\[2ex]
D\dfrac{\partial q}{\partial \alpha} + \lambda_2\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + A\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = 0 \\[2ex]
D\dfrac{\partial p}{\partial \beta} + C\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + \lambda_2\dfrac{\partial y}{\partial \beta} = 0 \\[2ex]
D\dfrac{\partial q}{\partial \beta} + \lambda_1\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + A\dfrac{\partial y}{\partial \beta} = 0
\end{cases}
\tag{2.11}
$$

これは "特性微分方程式系 (System of characteristic differential equations) "である。もし $(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta), z(\alpha,\beta), p(\alpha,\beta), q(\alpha,\beta))$ が (2.11) の解であるならば、$\partial z/\partial\beta - p\partial x/\partial\beta - q\partial y/\partial\beta = 0$ が成り立つことを証明することが出来る。従って (2.11) にこの方程式を付け加える必要はない。(2.11) は丁度 "決定系" である。(2.11) の局所可解性は H. Lewy [15]、その後 J. Hadamard [8] により証明されている。一般的には (2.11) は古典解を大域的に持たないであろうと予測している。しかし古典解を大域的に持つ場合もある。それが §3 以降の内容である。

(2.1) に対する初期値問題について局所論を述べておこう。(2.11) に対する初期値問題の解を $(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta), z(\alpha,\beta), p(\alpha,\beta), q(\alpha,\beta))$ と記す。初期帯が非特性的であるならば $D(x,y)/D(\alpha,\beta) \neq 0$ となる。従って初期帯の近傍において方程式系 $x = x(\alpha,\beta)$, $y = y(\alpha,\beta)$ を (α,β) に関して一意的に解くことが出来る。それを用いて $z(x,y) = z(\alpha(x,y), \beta(x,y))$ と置けば、それが (2.1) に対する初期値問題の解である。以上を纏めると

定理 2.6 ([3], [5, 6]) C^∞-空間において (2.1) に対する初期値問題を考える。初期帯 C_0 は特性的でないと仮定すると、C_0 を満たす (2.1) の解は C_0 の近傍に於いて唯一つ存在する。

3 非線形双曲形方程式

次の様な非線形双曲形方程式に対する初期値問題について考える：

$$
F(q,r,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} f\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = r - f'(q)t = 0 \quad \text{in} \quad \{x > 0, y \in \mathbf{R}^1\} \equiv \mathbf{R}^2_+, \tag{3.1}
$$

$$z(0,y) = z_0(y), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,y) = z_1(y) \qquad on \quad \{x = 0, y \in \mathbf{R}^1\} \tag{3.2}$$

ここで $f(q) \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$、かつ $f'(q) > 0$ である。また $z = z(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ に於いて定義された未知関数であり、初期関数 $z_i(y)$ $(i = 0,1)$ は十分に滑らかであると仮定する。方程式 (3.1) は "Monge-Ampère" 型である。実際 (2.1) において $A = 1, B = D = E = 0, C = -f'(q)$ とおけば (3.1) が得られる。しかし (3.1) は一般的には Darboux-Goursat の意味で可積分ではない。例えば N. F. Zabusky [30] では $f(q) = (1+\varepsilon q)^{-2\alpha}$ の場合が考察されている。ここで ε は十分に小さい正の定数である。このとき、(3.1) が Darboux-Goursat の意味で可積分となる必要十分条件は $\alpha = 2$ である。この例からも予測出来る様に "Darboux-Goursat の意味で可積分" となる方程式は例外的なのである。

初期値問題 (3.1)-(3.2) が古典解を大域的に持たないことは良く知られている。例えば N. F. Zabusky [30] や P. D. Lax [13]。但し [13] においては 2×2 双曲形保存系が考察されている。その後、古典解の "life-span" の評価について沢山の研究論文が出版された。あまりにも沢山あるので、ここでは何もふれない。我々の目的は特異点を越えて解を延長することである。その為に §2 で述べた手法により (3.1) を cotangent space $\mathbf{R}^5 = \{(x,y,z,p,q)\}$ の中で解いてみる。

先ず方程式 (3.1) を (2.6) の形に表現する。その為に $\omega_1 = dp \pm \lambda(q)dq$、そして $\omega_2 = \pm\lambda(q)dx + dy$ とおく。ここで $\lambda(q) = \sqrt{f'(q)}$ である。次に ω_1 と ω_2 の外積をとり、そこに 2 次の接触構造 $\omega_0 = 0$, $dp = rdx + sdy$ 及び $dq = sdx + rdy$ を代入すると次の式を得る：

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \{r - f'(q)t\}\ dx \wedge dy\,. \tag{3.3}$$

従って (3.1) に対する (2.11) は次の様に書ける：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} + \lambda(q)\dfrac{\partial q}{\partial \alpha} = 0, \\[2ex] \lambda(q)\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial \beta} - \lambda(q)\dfrac{\partial q}{\partial \beta} = 0, \\[2ex] -\lambda(q)\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \quad . \tag{3.4}$$

初期条件 (3.2) に対応して、(3.4) に対する初期条件を次の様におく：

$$x(\alpha,\alpha) = 0,\ y(\alpha,\alpha) = \alpha,\ p(\alpha,\alpha) = z_1(\alpha),\ q(\alpha,\alpha) = z_0'(\alpha). \tag{3.5}$$

(3.4) – (3.5) を解くことにより次の式を得る：

$$p + \Lambda(q) = \psi_1(\beta), \qquad p - \Lambda(q) = \psi_2(\alpha) \tag{3.6}$$

ここで $\Lambda'(q) = \lambda(q)$, $\psi_1(-\alpha) = z_1(\alpha) + \Lambda(z_0'(\alpha))$,　$\psi_2(\alpha) = z_1(\alpha) - \Lambda(z_0'(\alpha))$ である。仮定より $\Lambda'(q) > 0$ なので $\Lambda(q)$ の逆関数は全空間で存在し、かつ滑らかである。従って p 及び q は (α, β) の滑らかなな関数であり、(α, β) は全空間 $\mathbf{R}^2$ を動く。一方、x と y は次の方程式系の解である：

$$\begin{cases} \lambda(q)\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = 0 \\ \\ -\lambda(q)\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = 0 \end{cases} . \tag{3.7}$$

(3.7) は x と y に関する線形波動方程式である。従って $x = x(\alpha, \beta)$ 及び $y = y(\alpha, \beta)$ は (α, β) の滑らかな関数として定まり、また (α, β) は全空間 $\mathbf{R}^2$ を動く。解 $z = z(\alpha, \beta)$ は接触構造 $dz = pdx + qdy$ と初期条件 (3.2) により一意的に決定される。次の定理が得られる：

定理 3.1 (3.1) – (3.2) は正規幾何学的解を大域的にもつ。

(3.6) 及び (3.7) を解いて得られた幾何学的解の「正規性」、即ち

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \partial x/\partial \alpha & \partial y/\partial \alpha & \partial z/\partial \alpha & \partial p/\partial \alpha & \partial q/\partial \alpha \\ \partial x/\partial \beta & \partial y/\partial \beta & \partial z/\partial \beta & \partial p/\partial \beta & \partial q/\partial \beta \end{pmatrix} = 2 . \tag{3.8}$$

について解説する。これを示す為に次の補題を準備する。

補題 3.2 $\psi_2'(\alpha_0) = 0$ となる α_0 が存在するとき、$(\partial x/\partial \alpha)(\alpha_0, \beta) \neq 0$ が任意の β に対して成立する。

補題 3.3 $\psi_1'(\beta_0) = 0$ となる β_0 が存在するとき、$(\partial x/\partial \beta)(\alpha, \beta_0) \neq 0$ が任意の α に対して成立する。

更に (3.6) より次の関係式が得られる：

$$2\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \psi_2'(\alpha),\ 2\frac{\partial p}{\partial \beta} = \psi_1'(\beta),\ 2\lambda(q)\frac{\partial q}{\partial \alpha} = -\psi_2'(\alpha),\ 2\lambda(q)\frac{\partial q}{\partial \beta} = \psi_1'(\beta).$$

上の関係式と補題 3.2、補題 3.3 を結び付けると (3.8) を得る。

次に古典解の爆発について考察する。先ず古典解が存在している領域に於いて次の関係式が成り立つ：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = r\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + s\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\ , & \dfrac{\partial p}{\partial \beta} = r\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + s\dfrac{\partial y}{\partial \beta} \\ \\ \dfrac{\partial q}{\partial \alpha} = s\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + t\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\ , & \dfrac{\partial q}{\partial \beta} = s\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + t\dfrac{\partial y}{\partial \beta} \end{cases} , \tag{3.9}$$

ここで r, s 及び t は $z = z(x,y)$ の 2 回偏導関数である。$D(x,y)/D(\alpha,\beta) = 2\lambda(q)(\partial x/\partial\alpha)(\partial x/\partial\beta) \neq 0$ ならば、(3.9) を (r,s,t) に関して解くことにより次の関係式を得る：

$$r = \frac{1}{4}\{\frac{\psi_1'(\beta)}{\frac{\partial x}{\partial\beta}(\alpha,\beta)} + \frac{\psi_2'(\alpha)}{\frac{\partial x}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)}\},\quad s = \frac{1}{4\lambda(q)}\{\frac{\psi_1'(\beta)}{\frac{\partial x}{\partial\beta}(\alpha,\beta)} - \frac{\psi_2'(\alpha)}{\frac{\partial x}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)}\},\quad t = \frac{1}{\lambda(q)^2}r\ . \tag{3.10}$$

$D(x,y)/D(\alpha,\beta)$ が点 (α^0,β^0) に於いて 0 になるならば、Lemma 3.3、Lemma 3.4 及び (3.10) より (r,s,t) はその点において必ず ∞ となることが判る。即ち

定理 3.4 $(D(x,y)/D(\alpha,\beta))(\alpha^0,\beta^0) = 0$ と仮定する。点 (x,y) が点 $(x(\alpha^0,\beta^0), y(\alpha^0,\beta^0))$ に近づくとき、(r,s,t) は必ず ∞ に発散する。

この定理の意味を説明する。一般的には $D(x,y)/D(\alpha,\beta) = 0$ となる点においても古典解が存在する場合がある。この現象は 1 階偏微分方程式の場合でも生じる。しかし定理 3.4 が主張したいことは「初期値問題 (3.1) – (3.2) に対しては、$D(x,y)/D(\alpha,\beta) = 0$ となる点において必ず古典解が爆発する」のである。

我々の一番の関心は特異点を越えて解を延長することである。その為には先ず特異点を含んだ解，即ち「弱解」の概念を導入しておく必要がある。現時点において最も認知されている弱解の定義を書いておこう。

定義 3.5 関数 $z = z(x,y)$ が (3.1) – (3.2) の弱解であるとは次の条件 (i) 及び (ii) が満たされるときである：

(i) 関数 $z = z(x,y)$ は連続であり、かつその超関数の意味での導関数 $(\partial z/\partial x)(x,y)$ 及び $(\partial z/\partial y)\ (x,y)$ は有界可測である。

(ii) $z = z(x,y)$ が (3.1) を超関数の意味で満たす、即ち次の関係式 (3.11) がすべての $\varphi(x,y) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して成り立つ：

$$\int_{\mathbf{R}^2_+} \{\ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - f(\frac{\partial z}{\partial y})\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ \}dxdy + \int_{\mathbf{R}^1} z_1(y)\varphi(0,y)\ dy = 0 \quad . \tag{3.11}$$

このとき次の結果を得る：

定理 3.6 (3.4) – (3.5) を解いて得られた幾何学的解を *base space* $\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z)\}$ に射影することにより、定義 3.5 の意味での “(3.1) – (3.2) の弱解”を構成することは出来ない。

勿論、“定義の意味を変えれば”、(3.4)−(3.5) を解いて得られた幾何学的解を base space$\mathbf{R}^3$ $= \{(x,y,z)\}$ に射影することにより弱解を構成することが可能になる。例えば次の様に弱解の定義を変えてみよう。

定義 3.7 関数 $z = z(x,y)$ が (3.1) − (3.2) の弱解であるとは次の条件 (i) 及び (ii) が満たされるときである：
(i) 関数 $z = z(x,y)$ は有界可測であり、かつその古典的な意味での導関数 $(\partial z/\partial x)(x,y)$ 及び $(\partial z/\partial y)(x,y)$ が殆ど至る所で存在し、それらは有界可測である。
(ii) $z = z(x,y)$、その古典的な意味での導関数 $(\partial z/\partial x)(x,y)$、及び $(\partial z/\partial y)(x,y)$ は (3.1) を超関数の意味で満たす、即ち次の関係式 (3.11) がすべての $\varphi(x,y) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して成り立つ：

$$\int_{\mathbf{R}_+^2} \{ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - f(\frac{\partial z}{\partial y})\frac{\partial \varphi}{\partial y} \}dxdy + \int_{\mathbf{R}^1} z_1(y)\varphi(0,y)\ dy = 0 \quad . \tag{3.12}$$

上の定義を導入すると次の定理が得られる。

定理 3.8 (3.4) − (3.5) を解いて得られた幾何学的解を *base space* $\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z)\}$ に射影することにより、定義 3.7 の意味での “(3.1) − (3.2) の弱解”を構成することが出来る。

4 双曲形保存則系

方程式 (3.1) と密接な関係にある「或る双曲形保存則系」について考察する。$z = z(x,y)$ を (3.1) の解としたとき、$p = \partial z/\partial x, q = \partial z/\partial y$ とおき、$U(x,y) = {}^t (p,q), F(U) = {}^t (f(q),p)$ そして $U_0(y) = {}^t (z_1(y), z_0'(y))$ と書けば、次の様な方程式系を得る：

$$\frac{\partial}{\partial x}U - \frac{\partial}{\partial y}F(U) = 0 \qquad \text{in} \quad \{x > 0, y \in \mathbf{R}^1\}, \tag{4.1}$$

$$U(0,y) = U_0(y) \qquad \text{on} \quad \{x = 0, y \in \mathbf{R}^1\} \quad . \tag{4.2}$$

§3 と同じ方法により, (4.1) の解は次の様に書き表される：

$$p + \Lambda(q) = \psi_1(\beta), \qquad p - \Lambda(q) = \psi_2(\alpha) \tag{4.3}$$

ここで §3 と同じ記号を用いた。(x,y) も §3 におけるのと同様にして (3.7) を解くことにより得られる。またこの場合も初期値がいくら滑らかであっても、一般的には解は有限時間内に特異点をもつことが良く知られている。例えば P. D. Lax [13] 。ここで P. D. Lax [14] は初期値問題 (4.1)-(4.2) に対して次の様に弱解の概念を導入した。

定義 4.1 有界可測2-ベクトル関数 $U{=}U(x,y)$ が (4.1)-(4.2) の弱解であるとはそれが (4.1)-(4.2) を超関数の意味で満足するとき、即ち

$$\int_{\mathbf{R}^2_+}\{U(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)-F\ (U)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\}dxdy+\int_{\mathbf{R}^1}U_0(y)\varphi(0,y)dy=0 \qquad (4.4)$$

が任意の 2-ベクトル関数 $\varphi(x,y)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して成立するときである。

有界可測関数 $U=U(x,y)$ が (4.1) の弱解であり、曲線 $y=\gamma(x)$ に沿って jump discontinuity をもつと仮定する。このとき $y=\gamma(x)$ に沿って次の様は Rankine-Hugoniot 条件が成立する：

$$[p]\dot{\gamma}+[f(q)]=0, \qquad (4.5)$$

$$[q]\dot{\gamma}+[p]=0. \qquad (4.6)$$

このとき次の定理が得られる。

定理 4.2 (4.3)、及び (3.7) を解いて得られた $x=x(\alpha,\beta), y=y(\alpha,\beta)$ を空間 $\mathbf{R}^4=\{(x,y,p,q)\}$ に射影することにより、定義 4.1 の意味での "(4.1) − (4.2) の弱解" を構成することは出来ない。

これまでの歴史を振り返ってみる。単独 1 階偏微分方程式の場合、cotangent space の中で幾何学的解を構成し、それを base space に射影すると定義 4.1 の意味での弱解を構成することが出来た。例えば M. Tsuji [21, 22], S. Nakane [17, 18], S. Izumiya [9], S. Izumiya and G. T. Kossioris [10, 11], etc. etc.。しかし 1 階偏微分方程式「系」の場合、同様の方法で弱解を構成することは出来ないのである。勿論、弱解の定義を変えることにより、定理 3.8 に対応する結果を得ることは可能である。この様な議論も含めて、「幾何学的解を base space に射影すればどの様な解を得ることが出来るか」について更に詳しく検討しておく必要があると思っている。

参考文献

[1] R. Bryant, P. Griffiths and L. Hsu, *Toward a geometry of differential equations*, in "Geometry,Topology, and Physics for Raoul Bott" edited by S.-T.Yau (International Press, 1994), 1-76.

[2] R. Courant and D. Hilbert, *Method of Mathematical Physics*, vol.2, Interscience, New York, 1962.

[3] G. Darboux, *Leçon sur la théorie générale des surfaces*, tome 3, Gauthier-Villars, Paris, 1894.

[4] B. Gaveau, *Evolution of a shock for a single conservation law in* 2+1 *dimensions*, Bull. Sci. Math. **113** (1989), 407-442.

[5] E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome 1, Hermann, Paris, 1896.

[6] E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, tome 3, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

[7] J. Guckenheimer, *Solving a single conservation law*, Lecture Notes in Math. (Springer-Verlag) **468** (1975), 108-134.

[8] J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris, 1932.

[9] S. Izumiya, *Geometric singularities for Hamilton-Jacobi equations*, Adv. Studies in Math. **22** (1993), 89-100.

[10] S. Izumiya and G. T. Kossioris, *Semi-local classification of geometric singuarities for Hamilton-Jacobi equations*, J. Diff. Eq. **118** (1995), 166-193.

[11] S. Izumiya and G. T. Kossioris, *Formation of singularities for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Banach Center Publications **33** (1996), 127-148.

[12] G. Jennings, *Piecewise smooth solutions of single conservation law exist*, Adv. in Math. **33** (1979), 192-205.

[13] P. D. Lax, *Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations*, J. Math. Physics **5** (1964), 611-613.

[14] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 537-566.

[15] H. Lewy, *Über das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängen Veränderlichen*, Math. Ann. **98** (1928), 179-191.

[16] V. V. Lychagin, *Contact geometry and non-linear second order differential equations*, Russian Math. Surveys **34** (1979), 149-180.

[17] S. Nakane, *Formation of shocks for a single conservation law*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 1391-1408.

[18] S. Nakane, *Formation of singularities for Hamilton-Jacobi equations in several space variables*, J. Mat. Soc. Japan **43** (1991), 89-100.

[19] A. Kh. Rakhimov, *Singularities of Riemannian invariants*, Funct. Anal. and Appl. **27** (1993), no. 1, 39-50.

[20] R. Thom, *Stabilité structuelle et Morphogénèse* , W. A. Benjamin, Massachusetts, 1972.

[21] M. Tsuji, *Formation of singularities for Hamilton-Jacobi equation II*, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), 299-308.

[22] M. Tsuji, *Prolongation of classical solutions and singularities of generalized solutions*, Ann. Inst. H. Poincarè - Analyse nonlnéaire **7** (1990), 505-523.

[23] M. Tsuji, *Singularities for Monge-Ampère equations*, in "Third International Colloquium on Differential Equations" (VSP, Utrecht. 1993), 193-203.

[24] M. Tsuji, *Formation of singularities for Monge-Ampère equations*, Bull. Sci. math. **119** (1995), 433-457.

[25] M. Tsuji, *Monge-Ampère equations and surfaces with negative Gaussian curvature*, Banach Center Publications **39** (1997), 161-170.

[26] M. Tsuji, *Geometric approach to blow-up phenomena in nonlinear problems*, "Real analytic and algebraic singularities", Pitman Research Notes in Math. **381** (Longman, 1998), 164-180.

[27] D. V. Tunitskii, *On the global solubility of the Monge-Ampère hyperbolic equations*, Izvestiya: Mathematics **61** (1997), 1069-1111.

[28] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces I*, Ann. Math. **62** (1955), 374-410.

[29] M. Yamaguti and T. Nishida, *On some global solution for quasilinear hyperbolic systems*, Funkcialaj Ekvacioj **11** (1968), 51-57.

[30] N. J. Zabusky, *Exact solution for vibrations of a nonlinear continuous model string*, J. Math. Physics **3** (1962), 1028-1039.

住所:
辻　幹雄 (Mikio TSUJI)
603-8555 京都市北区上賀茂本山
京都産業大学理学部数学教室
E-mail: mtsuji@cc.kyoto-su.ac.jp
Tel:(075)705-1772
Fax:(075)705-1799